ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΟΣ ΠΑΡΑΓΩΝ

• $\left(\frac{y^2}{2} + 2y \cdot e^x\right) dx + (y + e^x) dy = 0$ •

Λύση

Έστω $M(x,y) = \frac{y^2}{2} + 2y \cdot e^x$ και $N(x,y) = y + e^x$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Αλλά, $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) \neq \frac{\partial N}{\partial y}(x,y)$ Άρα, δεν γνωρίζουμε εάν

η εξίσωση μας είναι άμεσα ολοκληρώσιμη

Άρα, θα κάναμε χρήση πολ/στικού παράγοντα (Euler)

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{y + 2e^x - e^x}{y + e^x} = 1 = P(x)$$

Έτσι, $p(x) = e^{\int P(x)dx} = e^x$, ο πολ/κός παράγοντας

Άρα, πολ/ζουμε την εξίσωση μας με τον $p(x)$, και έχουμε:

$$\left(\frac{y^2}{2} \cdot e^x + 2y \cdot e^{2x}\right) dx + (y \cdot e^x + e^{2x}) dx = 0$$

Θεωρώντας $M_0(x,y) = \frac{y^2}{2} \cdot e^x + 2y \cdot e^{2x}$ και $N(x,y) = y \cdot e^x + e^{2x}$

για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ παρατηρούμε ότι $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Άρα, η εξίσωση πλήρης (ή άμεσα ολοκληρώσιμη)

δηλ. $\exists f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ώστε:

$$d f(x,y) = \underbrace{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}_{M_0(x,y)} dx + \underbrace{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}_{N_0(x,y)} dy \overset{=0}{\Rightarrow} \boxed{f(x,y) = C_1} \quad (1)$$

$$M_0(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \Rightarrow \int \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx = \int M_0(x,y) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \int\left(\frac{y^2}{2} \cdot e^x + 2y \cdot e^{2x}\right) dx + g(y) =$$

$$= \frac{y^2}{2} e^x + y e^{2x} + g(y) \quad (2)$$

Ενώ,

$$N_0(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \Rightarrow \cancel{y e^x} + \cancel{e^{2x}} = \cancel{y \cdot e^x} + \cancel{e^{2x}} + g'(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C_2$$

Άρα, στη σχέση (2) είναι:

$$f(x,y) = \frac{y^2}{2} \cdot e^x + 2y e^{2x} + C_2 \overset{(1)}{=} C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} \cdot e^x + 2ye = C, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad C = C_1 - C_2$$

Άρα, το σύνολο των λύσεων καθορίζεται από την παραπάνω εξίσωση!

Παρατήρηση:

Αν $P(x,y) \neq 0$ ← πολ/κος παράγων $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, τότε οι εξισώσεις

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ και

$P(x,y) \cdot M(x,y)\,dx + P(x,y)\,N(x,y)\,dy = 0$

είναι ισοδύναμες (δηλ. έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων)